PART2 定積分と不等式

要点整理と公式

要点 ① 定積分と不等式

定積分と面積の関係から，次のことが成り立つ。

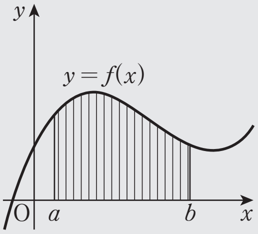
定積分と不等式①

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x) \geqq 0$ ならば

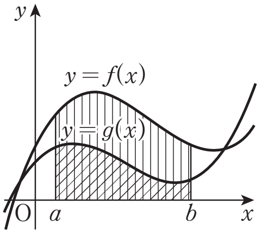
$$\int_a^b f(x)dx \geqq 0$$

が成り立つ。

等号成立は，常に $f(x)=0$ のときにのみ成り立つ。



関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$h(x)=f(x)-g(x)$ とすると，区間 $[a,\ b]$ で常に $h(x) \geqq 0$ であるから $\int_a^b h(x)dx \geqq 0$ が成り立つ。



よって $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx \geqq 0$ より

$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$ が成り立つ。

この等号は，常に $f(x)=g(x)$ のときにのみ成り立つ。

定積分と不等式②

関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

等号成立は，常に $f(x)=g(x)$ のときにのみ成り立つ。

(ex) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$1 \leqq 1+x^2 \leqq 1+x$，すなわち $\dfrac{1}{1+x} \leqq \dfrac{1}{1+x^2} \leqq 1$ であり，この等号は常には成り立たない。よって

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^1 dx$$

が成り立ち，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\log|1+x|]_0^1 = \log 2$，$\displaystyle\int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$ より

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 1$$

が成り立つ。

※$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ より，$\log 2 < \dfrac{\pi}{4}$ であることがわかる。

2 $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$1 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ であることを証明し，これを用いて不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 2-\sqrt{2}$ が成り立つことを証明せよ。

Point Pickup

定積分と不等式

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について

常に $f(x) \geqq 0$ ならば　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqq 0$

（等号成立は，常に $f(x)=0$ のとき）

常に $f(x) \geqq g(x)$ ならば　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$

（等号成立は，常に $f(x)=g(x)$ のとき）

第19講 PART2 確認問題

1 $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\dfrac{1}{1+x} \leqq \dfrac{1}{1+x^2} \leqq 1$ であることを示し，

これを用いて次の不等式を証明せよ。

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 1$$

ただし，答えは下の選択肢のうちから選べ。

〔証明〕

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x^2 \leqq x$

よって，$1 \leqq$ [ア] $\leqq 1+x$

各辺は正であるから，

$$\frac{1}{1+x} \leqq \frac{1}{1+x^2} \leqq 1$$

この不等式の等号は常には成り立たないから，

[イ] $< \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} <$ [ウ]

が成り立つ。ここで，

[イ] $=$ [[エ] $]_0^1 =$ [オ]

[ウ] $=$ [カ] であるから，

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 1$$

[[ア] の選択肢]

① 1　　② $1+x$

③ x^2　　④ $1+x^2$

[イ , ウ の選択肢]

① $\int_0^1 dx$　　② $\int_0^1 (1+x)dx$

③ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$　　④ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

[エ , オ , カ の選択肢]

① 1　　② $\log 2$

③ x　　④ $\log x$

⑤ $\frac{1}{(1+x)^2}$　　⑥ $\log|1+x|$

[MEMO]

PART2 定積分と不等式

2 $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$1 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ であることを証明し，これを用いて不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 2-\sqrt{2}$ が成り立つことを証明せよ。

[解答]

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$0 \leqq x^3 \leqq x \qquad -x \leqq -x^3 \leqq 0 \qquad 1-x \leqq 1-x^3 \leqq 1$

$1-x>0$ より $\sqrt{1-x} \leqq \sqrt{1-x^3} \leqq 1$

よって　$1 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ……①

①の等号は常には成り立たないから

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} dx = [x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \Big[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{2}$

よって $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 2-\sqrt{2}$

第19講 PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：④，イ：③，ウ：①，エ：⑥，
オ：②，カ：①

[解説]

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x^2 \leqq x$

よって，$1 \leqq 1+x^2 \leqq 1+x$ [A]

各辺は正であるから，

$$\frac{1}{1+x} \leqq \frac{1}{1+x^2} \leqq 1$$ [B]

この不等式の等号は常には成り立たないから，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^1 dx$$ [C]

が成り立つ。

ここで，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{(1+x)'}{1+x}dx$$

$$= [\log|1+x|]_0^1$$

$$= \log 2$$

$$\int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$$

であるから，

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 1$$

[A]　各辺に 1 を加える。

[B]　逆数の不等式にする。

[C]　定積分と不等式
区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について，常に $f(x) \geqq g(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

（等号成立は，常に $f(x)=g(x)$ のとき）